

結果が確実に予測できないからこそ楽しいのです。結果が全て見通せたら何の興味もわかないでしょう。期待した結果になれば有頂天になって喜び、期待しない結果であれば落胆して悲しむ、これが遊びなのです。ハラハラ・ドキドキし、一喜一憂するのが楽しいのです。

遊びは楽しい。これもまた、「世の中の真実」です。

40歳男性が、50歳まで生存できる書恰は、これらの各年の生存確率を掛けて得られます。

$$0 \cdot 99891 \times 0 \cdot 99881 \times 0 \cdot 99870 \times 0 \cdot 99856 \times 0 \cdot 99842 \times 0 \cdot 99827 \\ \times 0 \cdot 998133 \times 0 \cdot 99796 \times 0 \cdot 99775 \times 0 \cdot 99750 = 0 \cdot 983138 \dots$$

結局、50歳までの10年間に亡くなる人の確率（割合）は、 $1 - 0 \cdot 983138 = 0 \cdot 016862$ となるのです。

1000人の契約者の中で、10年間に亡くなる人は、約16.862人しかいないのです。多く見積もって、17人としても支払う死亡保険金は、 $1000 \text{万円} \times 17 = 1 \text{億} 7000 \text{万円}$ に過ぎません。

被保険者から受け取った保険料は、総額2億8488万円でしたから、差し引き、 $2 \text{億} 8488 \text{万円} - 1 \text{億} 7000 \text{万円} = 1 \text{億} 1488 \text{万円}$ は、保険会社の収入になるという計算になります。保険会社はこの中から、広告料や人件費を支出して、純利益が確保されることになります。

契約者の数が1000人でなく、1万人だったとすると、保険料収入は28億4880万円です。一方、支払う死亡保険金は、16億8620万円ですから、差し引き、11億6260万円が収入として残ることになります。人件費や広告料を引いて純利益は相当な金額で、**生命保険は儲かる商売、利益が上る分野**ということで、生命保険会社は乱立しているのです。

どれかの目を固定し、例えば、1の目が出る相対頻度を、20人分集めます。60回投げたときの、20人の1の目が出た相対頻度は、例えば図2.6のようになります。

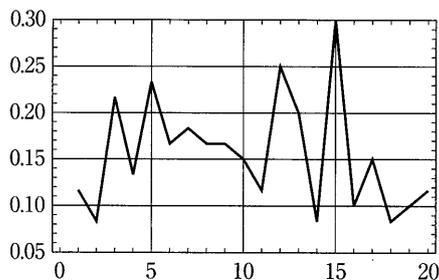


図 2.6: 20 人が 60 回投げたときの、サイコロの目の目が出た相対頻度

数値は省略して、図だけを示します。20 人分を示すと 20 人それぞれがかなり異なる相対頻度になることがわかります。

確率を学習するのに、数学ソフトは欠かせませんが、**Mathematica** での活用方法を知りたい方は、拙著『**Mathematica 確率——基健から確率微分方程式まで**』（朝倉を参照してください。

「ベルトランのパラドックス」は、確率の意味を考えるのに適したパラドックス（逆説）の一つです。

問題は次のようなものです。

1 つの円と、それに内接している正三角形があります（図 2. 11）。ここで、課題として与えられるのが、この円に、「デタラメに 1 本の弦を引く」というものです。

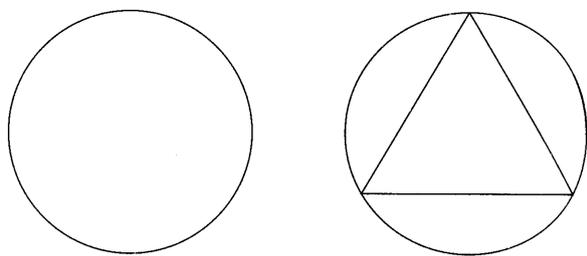


図 2.11: ベルトランのパラドックス

このとき、

「このデタラメに引いた弦の長さが、内接する正三角形の 1 辺の長さより長くなる確率を求めよ」

という課題を考えてみましょう。

■ 第 1 の考え 図 2. 12 のように、1 つの直径の上の点をラ

ランダムに選び、そこで垂線を立てて弦を引きます。

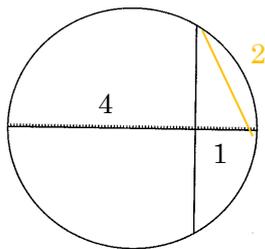


図 2.12: ベルトランのパラドックス (第1の考え)

ここで、計算が易くなるように、この円は、原点が中心半径は2であるとしましょう。

このように弦を引くと、弦の長さが、内接する正三角形の辺より長くなるのは、垂線を引 x 座標が、**-1 と、1 の間に来るとき**であることがわかります。

直径の上の弦を「デタラメに引く」ということは、直径上の点を、「等確率で選ぶ」ということであると考えられます(摺 2. 13)。

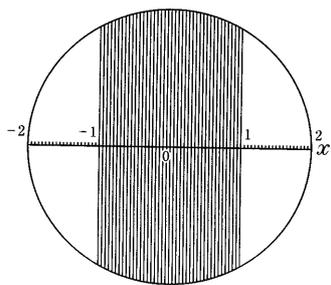


図 2.13: ベルトランのパラドックス (第1の考え)

直径の長さは4であり、-1 と 1 の間の長さは、2 ですから、弦の長さが内接する正三角形の1辺より長くなる確率は次のようになります。

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

■第2の考え 今度は、円周上の点を、均等にランダムにとって、直径に垂線を下ろして、弦を決めます (図 2. 14)

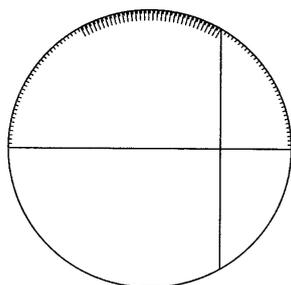


図 2.14: ベルトランのパラドックス (第2の考え)

この場合の確率は、円周上の $1/3$ に来れば、内接する正三角形の 1 辺より長くなるので、求める確率は次のようになります。

$$\frac{1}{3}$$

■第 3 の考え 今度は、弦の midpoint に着目します (図 2. 15)。弦の midpoint と円の中心の距離が、半径の半分以下にあるとき、弦の長さは、内接する正三角形の 1 辺より大きくなることに注目しましょう。

このようになる確率は、面積で考えると、次のように計れます。

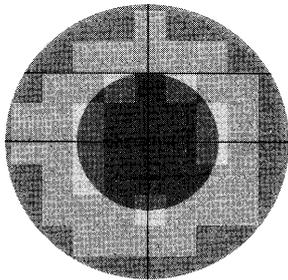


図 2.15: ベルトランのパラドックス (第 3 の考え)

$$\frac{\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2}{\pi r^2} = \frac{1}{4}$$

なんと、 $1/2$ 、 $1/3$ 、 $1/4$ の 3 通りの確率が得られてしまったのです。

実は、直径の延長上の 1 点からこの円に線を引いて弦を作ると、確率は、 $1/3$ から $1/2$ の間の値を自由に作れるのです。「確率の値がいくつもあるのではおかしいのではないか？」と思う人がいるでしょうが、実はこれは当然なのです。「デタラメに弦を引く」と言っても、その弦の引き方は指定されていないので、いろいろな「デタラメ」さがありうるからです。

近所に引っ越してきた家には、2 人の子供がいることはわかっています。しかし、男の子か女の子かはわかっていないとしましょう。

ある日偶然学校から帰ってきて、この家に入った 1 人の子供が、男の子であったのを目撃しました。もう 1 人は男の子でしょうか、女の子でしょうか？

「もう1人が男の子か女の子か、確率は1/2である」

と考える人が多いかもしれませんが、この考えは間違っているのです。

なぜなら、2人の子供がいる場合、年齢の上の子供と下の子供の組合せで、

A: (男, 男)、B: (男, 女)、C: (女, 男)、D: (女, 女)

の4通りがあり、このどれもが平等で、等確率で起きるからです。

「1人が男」という条件が与えられたということは、A、B、C、のどれかが起きていることがわかったのです。

この中で、「もう1人が女」が2通りあり、「もう1人が男」は1通りしかありません。

したがって、

「もう1人が男の確率は1/3であり、もう1人が女の確率は2/3である」

というのが正しい答えとなるのです。

「大数の弱法則」

「ベルヌーイの大数の法則」

大数の強法則

「サイコロを6回投げてみたとき、1の目が1回だけ、というのは、10人がやってみて、ほぼ4人にしか起きない」ということは、実験結果からも、計算上からもわかることです。実験結果と計算結果は一致していなければ意味がありませんが、この場合は見事に一致するのです。

最初に紹介した理屈の1つである、「サイコロは、1回振って1の目が出る確率は1/6なのだから、6回振れば $1/6+1/6+1/6+1/6+1/6+1/6=1$ (100%) となり、必ず1回出る」という理屈は、実際の実験結果と合わないのです、間違いであることがわかります。

「1回目に1の目が出て、あとは1以外の目が出る」というような、「継続した事柄の確率は、掛け算であり、足し算では求められない」のです。

ここでは、「1年間に東海大地震が起きる確率が2.9%だから、30年間で起きる確率は30倍して、 $2.9\% \times 30 = 87\%$ 」としているのです。1カ月では「 $2.9\% / 12 = 0.24\%$ 」としているのです。継続して起きる事象の確率を、和で計算しているのですが、これは誤りです。

30年間で地震が起きる確率が87%であるとき、1カ月に起きる確率を求める正しい計算は、次のようにします。

1カ月に起きる確率を p とすると、30年間、つまり360カ月地震が一度も起きない確率は次のようになります。

$$(1-p)^{(12 \times 30)} = (1-p)^{(360)}$$

30年間に少なくとも1回起きる確率は次の式で表せます。

$$1 - (1-p)^{(360)} = 0.87$$

この式を満たす p は次のように求められます。

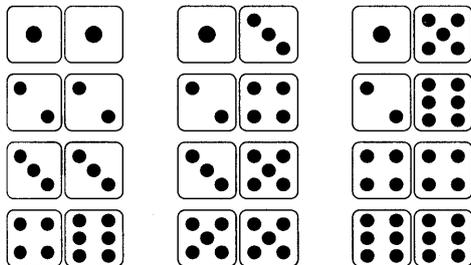
$$(1-p)^{(360)} = 1 - 0.87 = 0.13$$

いずれにしても、結果は、約0.565%となるのです。竹中氏の間違った計算結果0.2%とはかなり異なる数値です。

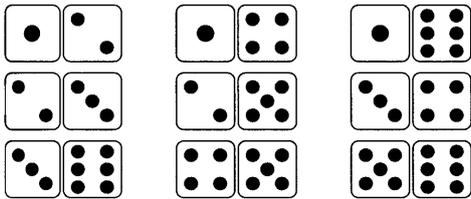
こんな、めったにない偶然が実際に起きるというのも、やはり「世の中の真実」です。

いくら確率が小さくても、普通では起きないことが起きることはありうるのです。

丁となる場合は、次の12通りです。



半となる場合は、次の9通りです。



12通りの丁の方が、9通りの半より多く出やすいのでしょうか？

2つのサイコロが区別できるとすると、場合の数は表 3.3 のように、共に、18通りとなります。

この実験結果から、丁と半の出方には差がないことがわかるのです。マクロの世界では、サイコロは互いが区別できるとして行動しているのです。

表 3.3: 2つのサイコロが区別できるとした場合の丁と半の回数

番号	丁サイコロ A	丁サイコロ B	半サイコロ A	半サイコロ B
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				

原理・原則を知る人が勝つということ

ここで、先手必勝の簡単なゲームを1つ紹介しておきましょう。「石取りゲーム」と呼ばれるゲームです。わかりやすい例で説明しておきましょう。

ここに石が17個あります。2人で交互に石を1個から3個まで取ることができるものとします。そして、最後に石を取った人が勝者となる、というルールです。

石は3個までしか取れないので、残りが4個になったら、相手が1個取れば3個取れることとなります (○●●●)。相手が2個取れば2個取れます (○○●●)。相手が3個

れば1個取れます(○○○●)。

...

今はわかりやすいように、4の倍数にすることを考えたのですが、一般にいくつにしても同じことです。すなわち、「はじめに n 個の石がある。1から k 個までの石を交互に取り、最後に石を取った方が勝つ」というルールで表されます。

「残りを $k+1$ の倍数にできた方が勝者となる」というのがこのゲームの真相です。最初にあった石の数 n が、 $k+1$ の倍数でなければ「先手必勝」となり、 n が $k+1$ の倍数であれば「後手必勝」となるゲームなのです。

最初は、「残りを $k+1$ の倍数にすれば必ず勝てる」というカラクリに気がつかないでゲームをしていて、偶然性で勝ったり負けたりしているのも面白いかもしれません。途中で「カラクリ」に気がついた方が連勝を続けることになりませんが。

良く考えること、バイズの定理を使いこなせること。

ある町のアパートには、部屋が3つあり、A、B、C、の名前がついています。

Aの部屋には男2人が住んでいて、Bの部屋には男1人と女1人が住んでいて、Cの部屋には女2人が住んでいます。このアパートの住人は近くのピザ屋によく注文して配達してもらっています。

ある日曜日、ピザ屋にいつものように注文の電話がかかってきました。電話は女の人でしたが、注文内容の確認のためか、近くで男の声が聞こえました。

つまり、Bの部屋から注文があったのです。

このアパートにあまり配達したことがない、新人のアルバイト店員のK君が、ピザが温かいうちに届けようと、急いで配達に行きました。ところが、このアパートに来て、男1人、女1人で住んでいる部屋がわからなくなってしまいました。

このK君は、携帯電話を忘れてきてしまい、店に確認の電話ができませんでした。そこで彼は、

「間違ったら謝って別の部屋へ配達すればいいや」と思って、山勘で、「エイやっ」と1つの部屋を選んでノックしてみたのです。ノックすると中から女の人の声が聞こえて、玄関口に出てくるようでした。

さて、彼がノックした部屋が、注文のあった「男1人、女

1人が住んでいる部屋」である確率は、いくらでしょうか？

この問題の答えとしては、通常次の2通りの値が考え出されます。

■第1の考え 玄関に出てくる人が女の人である場合は、Bの部屋である場合と、Cの部屋である場合の2通りがあります。注文された部屋はそのうちの1つだから、2通りのうちの1つで、当たる確率は、1/2であると考えられます。

■第2の考え このアパートには、女の人が3人住んでいます。部屋で声がして玄関に出てくる心配がするのは、この3人のうちの誰かです。注文どおりになるのは、この女の人が男の人と住んでいる場合ですから、3通りのうちの1通りが注文どおりになる場合となり、確率は、1/3と考えるのです。

この2通りの考えのうち、どちらが正しいのでしょうか？

$P_{(女が応答)}(\text{もう一人は男})$

$$\begin{aligned} &= \frac{P((女が応答) \cap (\text{もう一人は男}))}{P((女が応答) \cap (\text{もう一人は男})) + P((女が応答) \cap (\text{もう一人も女}))} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

死刑囚A,B,Cのうち、一人が恩赦になるとする。

誰が恩赦になるかは最初はわからないので、Aが釈放される確率は1/3、Bが釈放される確率も1/3、Cが釈放される確率も1/3です。

誰が恩赦の対象に選ばれるか、明日の発表を前に、囚人Aが、看守に頼みました。誰が恩赦になるか、看守は既に知っているのですが。

「看守さんよ。3人のうち、恩赦になるのは1人で、2人は恩赦にならないのだから、BとCのうち、恩赦にならない人を教えてくれて構わないでしょう。どちらが恩赦にならないかを教えてくれませんか？」

看守は、

「それももっともだ、Aに教えても害はないだろう」

と考えて、囚人Aに、

「囚人Bは恩赦にはならないで死刑だよ」

と、Aに教えてやりました（賄賂を受け取る約束をしたかどうかはわかりませんが）。

これを聞いた囚人 A は、「恩赦になるのは、A か C となったから、恩赦になる確率は 1/2 になった」と考えたのです。

「確率が、1/3 から、1/2 に上がった」

と叫んで、小躍りして喜んだ……という筋書きです。果たして、この囚人の判断は正しいのか？ という問題です。

$$\begin{aligned}
 & P(\text{「看守がBは恩赦でないと告げる」}(A \text{ が恩赦になる})) \\
 &= \frac{P(\text{「Aが恩赦になる」} \cap \text{「看守がBは恩赦でないと告げる」})}{P(\text{「看守がBは恩赦でないと告げる」})} \\
 &= \frac{P(\text{「A恩赦」})P_{\text{「A恩赦」}}(\text{「看守がBは死刑と告げる」})}{P(A恩)P_{(A恩)}(B死告) + P(B恩)P_{(B恩)}(B死告) + P(C恩)P_{(C恩)}(B死告)}
 \end{aligned}$$

ここで、「A が恩赦」のとき、看守は確率 $\frac{1}{2}$ で、「B は死刑」と告げることが暗黙のうちに想定されているとしています。

$$P(A \text{ 恩赦})P_{\text{「A恩赦」}}(B \text{ は死刑と告げる}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$P(B \text{ 恩赦})P_{\text{「B恩赦」}}(B \text{ は死刑と告げる}) = \frac{1}{3} \times 0 = 0$$

$$P(C \text{ 恩赦})P_{\text{「C恩赦」}}(B \text{ は死刑と告げる}) = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$$

これらを代入して、

$$\begin{aligned}
 & P(\text{「看守がBは恩赦でないと告げる」}(A \text{ が恩赦になる})) \\
 &= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{3}} \\
 &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

A が恩赦の場合は、「B も C も死刑」→「B が死刑」or 「C が死刑」を等確率で言うことになる。

C が恩赦の場合は、「B が死刑」と必ず言うことになる。

買い替えによるシェアの収束

現在のメーカー	次トヨタ	次日産	次ホンダ	次スズキ
トヨタ	0.4	0.3	0.2	0.1
日産	0.3	0.5	0.1	0.1
ホンダ	0.5	0.3	0.1	0.1
スズキ	0.4	0.2	0.1	0.3

現在ホンダの人が 2 回買い替え後日産に変わっている確率は、下記 4 つの確率を足して 0.35。

現在	1 回目の 買い換え	2 回目の 買い換え	続いた確率
ホンダ	トヨタ (0.5)	日産 (0.3)	$0.5 \times 0.3 = 0.15$
ホンダ	日産 (0.3)	日産 (0.5)	$0.3 \times 0.5 = 0.15$
ホンダ	ホンダ (0.1)	日産 (0.3)	$0.1 \times 0.3 = 0.03$
ホンダ	スズキ (0.1)	日産 (0.2)	$0.1 \times 0.2 = 0.02$

$$\text{行列 } A = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{トヨタ} & \text{日産} & \text{ホンダ} & \text{スズキ} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{トヨタ} \\ \text{日産} \\ \text{ホンダ} \\ \text{スズキ} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.1 & 0.1 \\ 0.5 & 0.3 & 0.1 & 0.1 \\ 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\text{行列 } B = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{トヨタ} & \text{日産} & \text{ホンダ} & \text{スズキ} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{トヨタ} \\ \text{日産} \\ \text{ホンダ} \\ \text{スズキ} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.1 & 0.1 \\ 0.5 & 0.3 & 0.1 & 0.1 \\ 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\text{行列 } A \times B = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{トヨタ} & \text{日産} & \text{ホンダ} & \text{スズキ} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{トヨタ} \\ \text{日産} \\ \text{ホンダ} \\ \text{スズキ} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.39 & 0.35 & 0.14 & 0.12 \\ 0.36 & 0.39 & 0.13 & 0.12 \\ 0.38 & 0.35 & 0.15 & 0.12 \\ 0.39 & 0.31 & 0.14 & 0.16 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$A^{10} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{トヨタ} & \text{日産} & \text{ホンダ} & \text{スズキ} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{トヨタ} \\ \text{日産} \\ \text{ホンダ} \\ \text{スズキ} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.377841 & 0.359375 & 0.137784 & 0.125 \\ 0.377841 & 0.359375 & 0.137784 & 0.125 \\ 0.377841 & 0.359375 & 0.137784 & 0.125 \\ 0.377841 & 0.359375 & 0.137784 & 0.125 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

これらを見ると、現在使っているメーカーに関係なく、買い換えが繰り返されると、どのメーカーの単に買い換えるかの確率が一定になっていきます。これが、各メーカーの「市場占有率（シェア）」に他ならないのです。

もし買い換えの推移確率が不変ならば、各メーカーのシェアは、推移確率の行列を多数回掛け算したときに安定する値として、あらかじめ運命づけられています。今の車を自社の車へ買い換えてもらう確率を増やすことが、シェアの拡大に不可欠です。このために、車販売の営業が頑張ったり、モデルチェンジしたり、全く新しい車を開発したり、各メーカーはしのぎを削っているのです。