

近代統計学では、「正しいことを否認する」という誤りと、「誤ったことを承認する」という誤りとの2種類の誤りを、それぞれ「第1種の誤り」および「第2種の誤り」といって区別する。

平均時速は

$$\frac{2a}{\frac{a}{80} + \frac{a}{20}} = \frac{1}{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{80} + \frac{1}{20} \right)} = 32 \text{ (km)}$$

となる。これは80と20を足して2で割るという常識的な平均（「単純算術平均」と呼ばれる）ではなく、「80と20のそれぞれの逆数の算術平均の逆数」という常識的でない平均であり、「調和平均」と呼ばれるものである。

車を運転している人ならば経験しているであろうが、ある箇所はノロノロ運転であったが、別の箇所ではかなり速いスピードで走ったというようなとき、全体では感覚的に感じるよりかなり遅い平均時速しか出ていないことに気づくことがよくある。これは同一距離だとノロノロで走った時間は長く、速いスピードで走れた時間は短時間であることによるものである。このようなとき、**算術平均よりも小さな値の出る調和平均が適当な平均なのである。**

以上のことは、村民の家が東西南北の平面上に散在していると考えた場合でも同様に成り立つ。すなわち、東西方向の x 軸と南北方向の y 軸を考え、各家の位置を座標平面上の点 (x, y) で表して、**役場までの直線距離（これを z とする）の2乗を各家の不便さとし、その不便さの合計を村民全体の不便さとする。**そしてその合計が最小になるようにすれば、役場の場所は、平面上の座標が x の算術平均 \bar{x} と、 y の算術平均 \bar{y} との組で表される点 (\bar{x}, \bar{y}) のところに決まる。

役場の候補地を座標軸上 (a, b) とすれば、各家 (x, y) から役場までの直線距離 z の 2 乗は

$$z^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 \quad (5)$$

であるから、全部の家についての役場までの直線距離の 2 乗の合計は

$$\sum z^2 = \sum (x-a)^2 + \sum (y-b)^2 \quad (6)$$

となる。これを村全体の不便さとするれば、役場の位置はそれを最小にするように決めればよい。その結果は

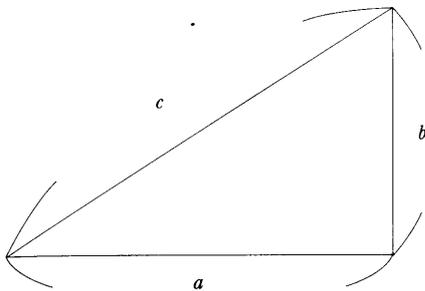
$$a = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum x \quad (7)$$

$$b = \bar{y} = \frac{1}{n} \sum y \quad (8)$$

となる。

ここで (5) 式および (6) 式について説明しよう。不便さを 2 乗の次元で考えるとき、それは東西方向の不便さと南北方向の不便さとの合計で考えればよいということであり、ここで用いられているのが直角三角形についての有名な「ピタゴラスの定理」である。ピタゴラスの定理は「三平方の定理」ともいわれるように平方すなわち **2 乗の次元で考えて成り立つこと**であり、1 乗の次元では成り立たない。これが 2 乗の次元で考えることの都合のよさとなっているのである (図 3. 1)。

図 3.1 ピタゴラスの定理： $a^2 + b^2 = c^2$



長さの 2 乗の次元で考えれば成り立つが、
1 乗の次元では成り立たない。

$$a + b \neq c$$

エリート・ビジネスマンを中心に強い影響力のある『日経ビジネス』誌 1996 年 10 月 7 日号は、「こんな会社がなぜ強い」というカバー・ストーリーで、「市場が選ぶ新エクセレント 100 社」と題し、ROR ランキング・ベスト 100 社を発表した。同誌は、ROR とは「ある会社の株式に投資して、どれだけの収益をあげたかを見る指

標。……・(中略) 96 年 6 月末まで 5 年間 (60 カ月) の毎月の投資収益率を平均して、年率換算した数字」としている。そして、1 位ロ

ーム、2位不動建設、3位 KOA、……といった具合にランキングが発表されている。この計算方法の説明を見るかぎり、本質的には上の数値例と同じ計算がなされていると判断して間違いない。

それでは、なぜ上の計算はおかしいのか。その答えは実は簡単である。上記の例で、最初の月の収益率（プラス100%）のベースは100円であり、次の月の収益率（マイナス50%）のベースは200円であって、二つの収益率のベースは異なっており、単純に足して2で割るべきものではないからである。

・・・

上記の場合、適切な平均は二つの前月比の数値を掛けて平方根に開いたもの、すなわち

$$\sqrt{2.0 \times 0.5} = 1.0$$

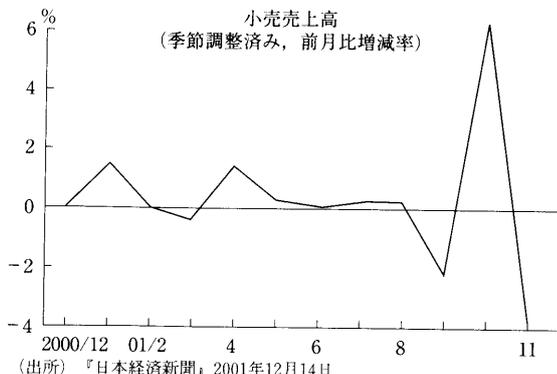
である。これから、この2カ月の前月比平均は1、したがって平均RORは0%ということになり、これで納得できる値が得られたことになる。

このような平均は「幾何平均」と呼ばれ、成長率とか上昇率のような率の平均を考えるときに適切なものであることは、統計学の初歩の初歩である。したがって『日経ビジネス』誌は、60カ月の毎月の投資収益率の60個のデータを算術平均すべきではなく、60個の対前月比を掛け合わせて60乗根に開くというかたちで幾何平均すべきであったのである。

平成15年の現在、公定歩合が0.1%という超低金利の時代（2001年9月19日以来）

下落率のマイナスの数値と上昇率のプラスの数値とはそのまま比較してはいけないのである。

図6.3 あなたは誤らずにグラフを読めますか？



9月の落ち込みは同時多発テロ事件の影響であるが、10月と11月の数値の異常さは、自動車販売業界によるゼロ金利ローンなどの思

い切った販売促進活動の影響である。そのような事実背景は別として、これら二つの図は人びとに誤った印象を与えている恐れが十分にある。たとえば図 6・2 で、読者は 9 月から 10 月への小売売上高の急上昇（対 9 月比 7.1%増）を折れ線グラフの傾斜で印象づけられていないだろうか。図 6・3 で、10 月から 11 月への売上高の下落を、同じようにグラフの傾斜で印象づけられていないだろうか。また図 6・3 で、11 月の小売売上高はテロ事件のあった 9 月売上高を下回ってしまったような印象を受けていないだろうか。

以上三つの問いにすべてノーと答えられる人はかなり注意深い人である。

図 6・2 で小売売上高が 9 月から 10 月へ急上昇しているように見えるのは、9 月の対 8 月比マイナス 2.2%と、10 月の対 9 月比プラス 7.1%をそのまま折れ線グラフでつないで示しているからである。

作為 commission

不作為 omission

ところが、著者には驚くべきことと思われるのだが、日本とアメリカの景気動向を示す日経 225 種平均とニューヨーク・ダウ工業株 30 種平均について、基本的なことが一般にほとんど理解されていないのである。

著者は以前からビジネスマン相手の講演や講義などで、しばしば次のような質問をしてきているが、その質問に完全に正確に答えられた人に 1 人も会ったことはない。

いま、次のように質問する。

「日経 225 種平均は、日本経済新聞社が計算し、発表している日本を代表する 225 社の株価の平均です。現在（たとえば 2002 年 3 月 29 日）1 万 1024 円 94 銭です。しかし、225 社の中に株価が 1 万 1000 円を超えている会社は 1 社もありません。なぜ「平均」が 1 万 1000 円を超えているのでしょうか。」

・・・

除数で調整する

ダウ・ジョーンズ (DJ) 式平均株価は、出発点においては全銘柄の株価の合計を銘柄数で割るといういわゆる「単純算術平均」であり、したがって 1896 年 5 月 26 日の DJIA の値 40 ドル 94 セントはその日の 12 銘柄の終値合計を 12 で割ったものであった。そして DJ 式のアイディアは、採用銘柄の入れ替えや増資などによって発生する平均株価の変化を、分子を単純な株価合計としたままで、分母すなわち株価合計を割る数（これを「除数」という）を変えることによって連続性のあるものにしようとするところにある。

簡単な例でこのアイデアを説明しよう。いま A, B 社の株価がどちらも 100 円であるとする。この 2 社の平均株価はいうまでもなく

$$\frac{100+100}{2}=100(\text{円})$$

である。ここで A 社が株式分割によって 1 株を 2 株に分割したとする。このような株式分割は、とくにアメリカでは企業がその成長の果実を株主に分配するために最もよく用いられる方法であり、わが国ではかつては不適切にも「株式無償交付」と呼ばれていたが、現在では「株式分割」に改まり、広く用いられている。仮に 1 株あたり配当が変わらなければ、1 株を 2 株に分割することは 2 倍の増配となる。仮に 1 株あたり配当が下げられても引下げ率が 50% 未満であれば増配と同じ効果を持ち、株主にとって利益となる。

ここで株式分割後最初の取引日に A 社の株価が 50 円になったとしても前日の 100 円から下がったことにはならないが、単純平均では

$$\frac{50+100}{2}=75(\text{円})$$

と下がったことになってしまう。そこで DJ 式では分子はそのままにしておいて平均が前日の 100 円と同じになるように分母の除数を修正するのである。すなわち除数 d は

$$\frac{50+100}{d}=100(\text{円})$$

になるように修正されるのである。この場合は $d=1.5$ となる。

一般に $1:(1+x)$ の率で株式分割が行われるとき、分割前後で株価が上下しないとすれば、分割直後の株価は分割直前の株価の $1/(1+x)$ に下がるから、分子の株価合計は小さくなる。そこで分母の除数を小さくして株式分割の影響を受けないようにしてやるのである。この意味で DJ 式平均は「修正」平均と呼ばれる。そしてこのような株式分割が採用銘柄について行われるたびに DJ 式平均の除数は前より小さくなっていく。

ダウ式平均株価の基本：まとめ

$$\text{単純算術平均株価} = \frac{\text{採用銘柄株価合計}}{\text{採用銘柄数}}$$

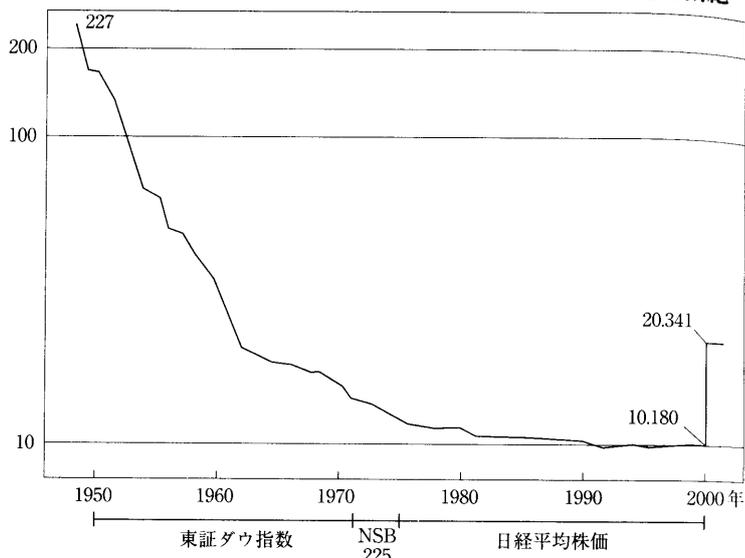
$$\text{ダウ式平均株価} = \frac{\text{採用銘柄株価合計}}{\text{除数}}$$

$$\frac{\text{ダウ式平均株価}}{\text{単純算術平均株価}} = \text{倍率} = \frac{\text{採用銘柄数}}{\text{除数}}$$

$$\text{倍率} \times \text{除数} = \text{採用銘柄数}$$

2000年4月24日の30銘柄入れ替えによって日経平均の除数は10.180か20.341へと何とほぼ2倍に上昇してしまった。ということは、率は22.102から11.061へと半分になってしまったということである。前述のような除数および倍率の解釈からすると、このような連続的な除数の上昇、倍率の低下は、日経平均の連続性を大きくない、日経平均はもはや少なくとも長期的には株価指標としての用性を失ったということになる（図9.1および図9.2における2000年4月前後での除数と倍率の大きな断絶を見ていただきたい）。

図9.1 日経平均株価の除数の変遷：2000年4月で生じた大きな断絶



(注) 各年末値、縦軸は対数目盛。

(出所) 宮川公男・花枝英樹編『株価指数入門』東洋経済新報社、2002年。

これに対して日経平均の場合には、入れ替え銘柄数の割合は225銘柄中30銘柄とDJIAの場合とまったく同じであったが、除数の上昇は10.180から20.341へと驚くほど大幅であった。これは入れ替え計算日4月21日における除外30銘柄の平均株価が182.73円であったのに対し、新採用30銘柄の平均株価は6363.43円と桁違いの差があったからである。

連続性は保たれていると主張する日本経済新聞社

連続性は損なわれたとする著者の見解に対して、日本経済新聞社は「ダウ式修正平均における除数決定ロジックは、ひとつの計算原則」であり、今回の入れ替えは「手続的に何ら変更なく」行われたもので、「決定された除数はマーケットが決めた相場から導かれた結果」であるとして、指数の連続性を主張している（『日経平均プロフィール』日本経済新聞社、2000年6月、24ページ）。

これは手続と計算式さえ忠実に守っていればよいという考え方で、統計の扱い方の基本をまったくわきまえないものである。読者は図9.1および図9.2における除数と倍率の非連続的な断絶を見れば、連続性は保たれているという同社の主張をどう容認できないであろう。

場面積では決定されない売上げの変動（分散）である。言い換えると $s_{y \cdot x}^2$ は、原因変数 x によっては決定されない（すなわち x 以外の要因による）結果変数 y の変動（分散）である。したがって、

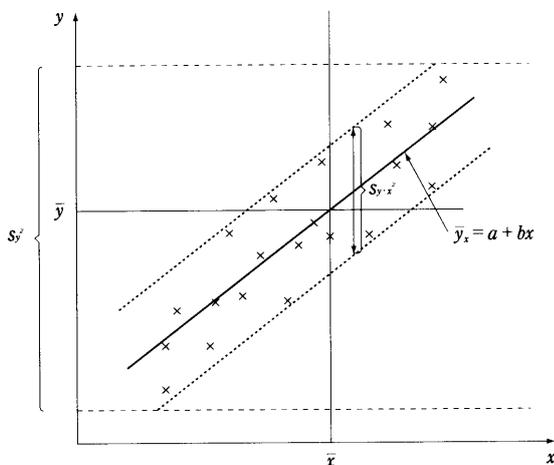
$$s_r^2 = s_y^2 - s_{y \cdot x}^2 \quad (6)$$

と書けば、 s_r^2 は、結果変数 y の変動が原因変数 x を考慮したときにどれだけ減少するか、言い換えると、原因変数 x によって結果変数 y の変動がどれだけ決定されるかを表すもの（(1) 式の分子）であると考えられる。そこで (1) 式は

$$\text{決定係数} = \frac{s_r^2}{s_y^2} = \frac{s_y^2 - s_{y \cdot x}^2}{s_y^2} = 1 - \frac{s_{y \cdot x}^2}{s_y^2} \quad (7)$$

となる。

図 13.1 決定係数の説明



もうはまだなり、まだはもうなり

これは、株価の天井や底値が誰にも正確にはわからないとき、もう天井（底値）と思って売（買）って誤ったり、まだ天井（底値）でないと売らない（買わない）という間違いを犯すことがよくあることを示している。

このような2種類の誤りは統計学では「第1種および第2種の誤り」と呼ばれ、非常に重要な概念である。すなわち、ある事柄（これを統計学では「検定仮説」という）が正しいのにそれを正しくないとしてしまう誤り（第1種の誤り）と、逆に、ある事柄が正しくないのにそれを正しいとってしまう誤り（第2種の誤り）である。上の例では、「まだ」を検定仮説と考えれば、「もうはまだなり」

（売るべきでないのに売ってしまう誤り）が第1種の誤り、「まだはもうなり」（売るべきなのに売らない誤り）が第2種の誤りということになる。

ここで困ったことに、これら二つの誤りの間には、一方の誤りを警戒してそれを小さくしようとすると、もう一方の誤りが大きくな

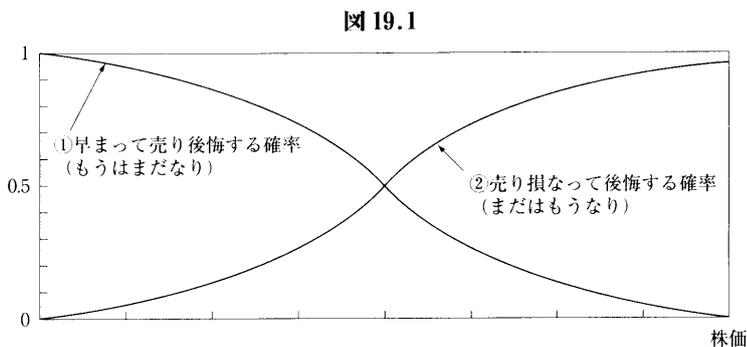
ってしまうという関係がある。たとえば、早まって安い値で売り過ぎる誤り（もうはまだなり）を小さくしようとすれば、まだまだと考えて高値で売り損なう誤り（まだはもうなり）を犯す危険が大きくなるのである。株式の例では、「まだ売べきでない」と「もう売べきである」はどちらか一方が必ず正しいから、

第1種の誤りを犯す確率=1-第2種の誤りを犯す確率
という関係があり（一般的にはこのような関係はない）、上のことは明らかである。

この関係を図で示すと図 19. 1 になる。

①の曲線は、株価が安いほどその値で売ると早まったと後悔する確率が高く、株価が高くなるほどその確率は小さくなることを表している。それに対して②の曲線は、株価が安いほど売り損なったと後悔する確率は小さく、だんだん高い株価になるとその確率は大きくなることを表している。

これら二つの曲線の高さの和は1であるから、それらは確率0. 5の高さの点で交わる。



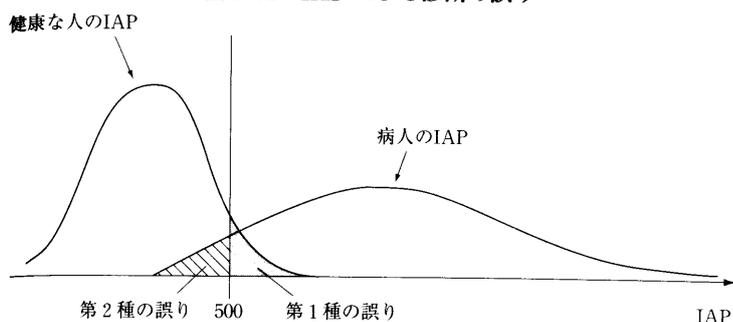
「有意である」は英語では
‘significant’であり、辞書には「重要である」という訳語も記されているが、もともとは signify（…を示す、知らせる）から来ている言葉である。統計学で用いる‘significant’も、重要であるという意味ではなく、何らかの原因あるいは理由の存在を、「示す」あるいは「知らせる」という意味である。それに対して有意でない（not significant）という場合には、原因あるいは理由がない、あるいは原因あるいは理由をつきとめられないということで、それを私たちは「たまたま」とか「偶然」という言葉で表すのである。

これに対して癌患者の IAP は癌の疾患別あるいは進行ステージ別によって異なり、それらの分類ごとにはサンプル数が少ないのではありません。はっきりした分布型はわからないが、全体的に見ると「対数正規分布」(IAP の対数値が正規分布)と考えてもよさそうであった。健康人の場合のように平均値と標準偏差は明確に求められないが、私の疾患が肺への転移癌であり、かつステージ I V であることを考えて、疾患があっても IAP が 500 を下回る (擬陰性) 確率は 5~10 数%程度と私は大まかに推定した。

以上のことから次のようなことが結論される。いま IAP の数値が 500 を超えたからということで医師の勧める手術を受けるとする。しかし健康人でも IAP が 500 を上回る確率は約 7%あるのであるから、それだけの確率で、しなくてもよい手術、あるいはすべきでない手術をしてしまうことになる。このように「すべきでないことをする誤り」を統計学では「第 1 種の誤り」という。それに対して IAP が 500 以下の場合には陰性として手術しないとする。しかし手術で直すべき疾患があっても IAP が 500 以下である確率は 5~10 数%あるのであるから、それだけの確率で、した方がよい手術、あるいはすべき手術をしないことになる。このように「すべきことをしない誤り」を統計学では「第 2 種の誤り」という。*

* 誤りを第 1 種あるいは第 2 種と呼ぶかについてはあるルールがあるが、ここではそのルールは気にせず、どちらを第 1 種あるいは第 2 種としてもよいとしておく。

図 27.2 IAP による診断の誤り



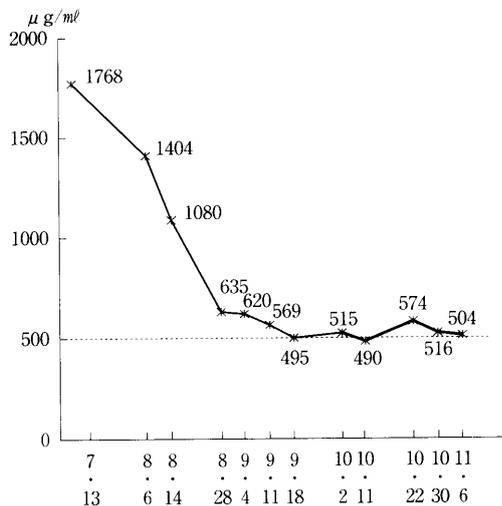
以上のような 2 種類の誤りは、完全ではない検査の数値によって決定しなければならない場合に避けることのできないものである。言い換えると、白か黒かを決定する場合に中間に灰色のゾーンがあって、そこではどちらに決めても誤りが生じうるが、どちらかに決めなければならないということである。今の場合、手術を勧める主治医に従って手術を応諾するか、あるいは主治医の勧めに反して手術を拒否するかのどちらかである。そして前者の場合には上述の第 1 種の誤りを犯すリスクがあり、後者の場合には第 2 種の誤りを犯すリスクに直面することになる。以上の説明を図解したものが図 27. 2 である。

...

私が必死になっていろいろと調べ、かつ考えた結論は以上のようなものであったが、その結果私の悩みや苦しみはなくなったわけではない。それどころか小さくなったわけでもない。わかったことは、たとえ主治医が斯界の大権威者であるとしても、**IAP**による**説得は誤りのないものではない**ということである。したがって権威のある専門家の意見にさえ素人の私が疑問を持たなければならないということで、悩みと苦しみは逆に大きくなったとさえいえるのである。手術に踏み切るべきか否かについて、もはや誰も完全に正しい選択を教えてくれる人はいない。それは100%正しい答えがないのに自分で決めなければならないこと、まさに**私が専門家の主治医の勧めを拒否して第2種の誤りのリスクに直面するという決断をしなければならないこと**だということがわかっただけなのである。そのときの心の葛藤はおそらく当事者でなければ理解できないことであろう。

そうして私は手術の拒否を決断した。その決断には以上述べたこと以外にもここでは書き切れないいろいろな要因がある。たとえばIAPにありうる測定誤差である。当時用いられていた測定方法はSRID法（一元放射免疫拡散法、Single radial immuno-diffusion）であった*が、私はその方法には当然ある程度の測定誤差があるものと考え、前述した495から515へという**IAPの上昇はその誤差範囲のものであると自らに思い込ませた**のである。

図 27.3 IAPの推移 (2)



...

幸いIAPは10月2日の段階で懸念されたように反転して一方的に上昇することはなく、上下変動をくり返した。そして退院まぎわのIAPは504であった（表27.1）。何よりもうれしかったことは**胸の病巣がほとんど消えてしまった**ことである。そして結果的には私の苦渋の決断は正しく、私は今日まで20年近く生き延びることができたのである。

なお、当時医学部の学生で、後に泌尿器科の医師となった私の長

女によれば、その後の医学の知見の変化や新しい治療法の開発により、今日では私と同様の場合、手術はしないことになっているということである。そして、私とほぼ同時期に同じように腎臓癌の肺転移で主治医の勧めのままに肺の手術を受けた人たちは、さらに脳や骨に転移するなどして、私の知るかぎりではその後みなが亡くなっている。

・・・

しかしリスクに直面して人間の犯しうる誤りには、「するべきでないことをする誤り」と「するべきことをしない誤り」という2種類の誤りがあることを教える統計学の教えはきわめて貴重であり、それが私の決断を幸いな方向に導くのに一つの大きな力になったことは否定できない事実である。