

$$\text{結果Bが得られたときに、それが原因Aによるものである確率} = \frac{\text{原因Aの確率} \times \text{原因Aがおきたときに結果Bがおきる確率}}{\text{結果Bがおきる確率の合計}}$$

記号を使ったベイズの定理の数式（原因をA，結果をBとして）

$$P(\text{原因}A | \text{結果}B) = \frac{\overset{\text{事後確率}}{P(\text{原因}A | \text{結果}B)} = \frac{\overset{\text{事前確率}}{P(\text{原因}A)} \times P(\text{結果}B | \text{原因}A)}}{P(\text{結果}B)}$$

◆目隠して壺から赤い玉を1個引いた。A,B どちらの壺から引いたか？



つぼAとつぼBが、それぞれあなたの前に置かれる確率（つぼの事前確率）は、

$$P(\text{つぼ}A) = \frac{1}{2} \quad P(\text{つぼ}B) = \frac{1}{2}$$

つぼAが置かれたとき、それぞれの色の玉を引く確率は、

$$P(\text{赤} | \text{つぼ}A) = \frac{1}{5} \quad P(\text{青} | \text{つぼ}A) = \frac{4}{5}$$

つぼBが置かれたとき、それぞれの色の玉を引く確率は、

$$P(\text{赤} | \text{つぼ}B) = \frac{3}{5} \quad P(\text{青} | \text{つぼ}B) = \frac{2}{5}$$

以上から、つぼの事後確率は次のようになります。

$$P(\text{つぼ}A | \text{赤}) = \frac{1}{4} \quad P(\text{つぼ}B | \text{赤}) = \frac{3}{4}$$

$$P(\text{つぼ}A | \text{青}) = \frac{2}{3} \quad P(\text{つぼ}B | \text{青}) = \frac{1}{3}$$

赤い玉を引いたという結果から得られる、つぼの事後確率の求め方は、次のようになります。

$$P(\text{つぼ}A | \text{赤}) = \frac{P(\text{つぼ}A) \times P(\text{赤} | \text{つぼ}A)}{P(\text{赤})}$$

$$= \frac{P(\text{つぼ}A) \times P(\text{赤} | \text{つぼ}A)}{P(\text{つぼ}A) \times P(\text{赤} | \text{つぼ}A) + P(\text{つぼ}B) \times P(\text{赤} | \text{つぼ}B)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{5}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{5}} = \frac{1}{4}$$

$$P(\text{つぼ}B | \text{赤}) = 1 - P(\text{つぼ}A | \text{赤})$$

$$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

同じようにして、 $P(\text{つぼ}A | \text{青})$ と $P(\text{つぼ}B | \text{青})$ も求められます。

75%の確率で、壺 B と推定。

囚人 A, B, C のうち、一人釈放で、2 人は処刑。

A が看守に B or C のどちらを処刑するか教えてほしいと尋ねた。

看守は B と答えた。

A は、もともと釈放の確率が $1/3$ だったが、看守の言葉で、釈放は自分か C なので、釈放確率は $1/2$ に上がったと考えた。正しいか？



ベイズの定理を使って計算しよう

A, B, C のそれぞれが釈放される事前確率は、

$$P(\text{A 釈放}) = \frac{1}{3}$$

$$P(\text{B 釈放}) = \frac{1}{3}$$

$$P(\text{C 釈放}) = \frac{1}{3}$$

看守が、A, B, C のそれぞれが処刑されると答える確率は、

$$\text{A 釈放のとき } P(\text{A 処刑} | \text{A 釈放}) = 0 \quad P(\text{B 処刑} | \text{A 釈放}) = \frac{1}{2} \quad P(\text{C 処刑} | \text{A 釈放}) = \frac{1}{2}$$

$$\text{B 釈放のとき } P(\text{A 処刑} | \text{B 釈放}) = 0 \quad P(\text{B 処刑} | \text{B 釈放}) = 0 \quad P(\text{C 処刑} | \text{B 釈放}) = 1$$

$$\text{C 釈放のとき } P(\text{A 処刑} | \text{C 釈放}) = 0 \quad P(\text{B 処刑} | \text{C 釈放}) = 1 \quad P(\text{C 処刑} | \text{C 釈放}) = 0$$

「B は処刑」とわかったときの、A, B, C それぞれの釈放の事後確率は次のようになります。

$$P(\text{A 釈放} | \text{B 処刑}) = \frac{1}{3}$$

$$P(\text{B 釈放} | \text{B 処刑}) = 0$$

$$P(\text{C 釈放} | \text{B 処刑}) = \frac{2}{3}$$

「B は処刑」とわかったときの、A 釈放の事後確率の求め方は次のようになります。

$$P(\text{A 釈放} | \text{B 処刑})$$

$$= \frac{P(\text{A 釈放}) \times P(\text{B 処刑} | \text{A 釈放})}{P(\text{B 処刑})}$$

$$= \frac{P(\text{A 釈放}) \times P(\text{B 処刑} | \text{A 釈放})}{P(\text{A 釈放}) \times P(\text{B 処刑} | \text{A 釈放}) + P(\text{B 釈放}) \times P(\text{B 処刑} | \text{B 釈放}) + P(\text{C 釈放}) \times P(\text{B 処刑} | \text{C 釈放})}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 1} = \frac{1}{3}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 1} = \frac{1}{3}$$

同じようにして、 $P(\text{B 釈放} | \text{B 処刑})$ と $P(\text{C 釈放} | \text{B 処刑})$ も求められます。

A が釈放という事後確率は $1/3$ のまま。

C が釈放という事後確率は $1/3 \rightarrow 2/3$ へ上がる。(B がゼロになった分が上乘せ)。

◆ 3つのサイコロを振って出た目の合計が9になる場合と10になる場合では、どちらが多いか？

組み合わせで考えると、9も10も6通り。

しかし、3つのサイコロを区別すると、9となるサイコロのパターンは25通り、10となるパターンは27通りある。

◆ 10万人のうち、感染者は100人。100人が検査を受けると、99人が陽性と判定。

非感染者9,900人は、3%にあたる2,997人が陽性と判定。よって、陽性判定は、99+2,997=3,096人。

本当に感染しているのは、99/3,096=3.2%。

陽性判定でも実際に感染している確率は3.2%(事後確率)ということ。事前確率0.1%。

ベイズの定理を使って計算しよう

感染している、もしくは感染していない確率(感染の事前確率)は、

$$P(\text{感染}) = \frac{1}{1000} \quad P(\text{非感染}) = \frac{999}{1000}$$

陽性と判定される確率は、

感染しているとき	感染していないとき
$P(\text{陽性} \text{感染}) = \frac{99}{100}$	$P(\text{陽性} \text{非感染}) = \frac{3}{100}$

以上から、陽性と判定されたときに感染している事後確率は、次のようになります。

$$P(\text{感染} | \text{陽性}) \approx 0.032$$

この事後確率の求め方は、次のようになります。

$$P(\text{感染} | \text{陽性}) = \frac{P(\text{感染}) \times P(\text{陽性} | \text{感染})}{P(\text{陽性})} = \frac{P(\text{感染}) \times P(\text{陽性} | \text{感染})}{P(\text{感染}) \times P(\text{陽性} | \text{感染}) + P(\text{非感染}) \times P(\text{陽性} | \text{非感染})}$$

$$= \frac{\frac{1}{1000} \times \frac{99}{100}}{\frac{1}{1000} \times \frac{99}{100} + \frac{999}{1000} \times \frac{3}{100}} = \frac{99}{3096} \approx 0.032 \quad (3.2\%)$$

再検査で陽性の場合、感染率はいくつになるか。

1回目陽性99人が再検査を受けて、陽性判定ができるのは99*99/100人。

1回目感染していないが陽性だった2,997人は再検査で陽性となるのは、2,997*3/100人。

よって、再検査で陽性となるのは、99*99/100 / (99*99/100 + 2,997*3/100) ≈ 0.52

ベイズの定理を使って計算しよう

感染の事前確率は、

$$P(\text{感染}) = \frac{99}{3096} \quad P(\text{非感染}) = \frac{2997}{3096}$$

陽性と判定される確率は、

感染しているとき	感染していないとき
$P(\text{陽性} \text{感染}) = \frac{99}{100}$	$P(\text{陽性} \text{非感染}) = \frac{3}{100}$

以上から、陽性と判定されたときに感染している事後確率は、次のようになります。

$$P(\text{感染} | \text{陽性}) \approx 0.52$$

この事後確率の求め方は、次のようになります。

$$P(\text{感染} | \text{陽性}) = \frac{P(\text{感染}) \times P(\text{陽性} | \text{感染})}{P(\text{陽性})} = \frac{P(\text{感染}) \times P(\text{陽性} | \text{感染})}{P(\text{感染}) \times P(\text{陽性} | \text{感染}) + P(\text{非感染}) \times P(\text{陽性} | \text{非感染})}$$

$$= \frac{\frac{99}{3096} \times \frac{99}{100}}{\frac{99}{3096} \times \frac{99}{100} + \frac{2997}{3096} \times \frac{3}{100}} = \frac{9801}{18792} \approx 0.52 \quad (52\%)$$

◆ひき逃げタクシー

タクシーの 15%は青、85%が緑。夜間に青を緑と間違える人は 20%、緑を青と間違える人は 25%。目撃者は、逃げたタクシーは青と証言した。逃げたタクシーが青である確率は？

ベイズの定理を使って計算しよう

街を走るタクシーが青か緑かの確率 (事前確率) は、
 $P(\text{青走}) = 0.15$ $P(\text{緑走}) = 0.85$

「青」と証言される確率は、
 青のタクシーが走っていたとき $P(\text{青証} | \text{青走}) = 0.8$
 緑のタクシーが走っていたとき $P(\text{青証} | \text{緑走}) = 0.25$

「青」と証言されたタクシーの事後確率は、次のようになります。
 $P(\text{緑走} | \text{青証}) \approx 0.64$

「青」と証言されたタクシーの事後確率の求め方は、次のようになります。

$$P(\text{青走} | \text{青証}) = \frac{P(\text{青走}) \times P(\text{青証} | \text{青走})}{P(\text{青証})}$$

$$= \frac{P(\text{青走}) \times P(\text{青証} | \text{青走})}{P(\text{青走}) \times P(\text{青証} | \text{青走}) + P(\text{緑走}) \times P(\text{青証} | \text{緑走})}$$

$$= \frac{0.15 \times 0.8}{0.15 \times 0.8 + 0.85 \times 0.25}$$

$$= \frac{0.12}{0.3325} \approx 0.36 \text{ (36\%)}$$

$$P(\text{緑走} | \text{青証}) = 1 - P(\text{青走} | \text{青証}) \approx 0.64 \text{ (64\%)}$$

◆オオカミ少年

少年がウソつきの確率 0.1。「オオカミがきたぞ」と叫んだあとにオオカミが発見される確率 0.8、逃げて発見されない確率 0.2。一方、少年がウソつきのとき、オオカミが発見される確率 0.3 (ウソをついても本当に現れる場合がある)。ウソつきの確率は？

ベイズの定理を使って計算しよう

少年がウソつき、または正直者である確率 (少年の事前確率) は、
 $P(\text{ウソつき}) = 0.1$ $P(\text{正直者}) = 0.9$

少年が正直者のとき
 $P(\text{発見} | \text{正直者}) = 0.8$ $P(\text{発見されず} | \text{正直者}) = 0.2$

少年がウソつきのとき
 $P(\text{発見} | \text{ウソつき}) = 0.3$ $P(\text{発見されず} | \text{ウソつき}) = 0.7$

以上から、羊が発見されなかったとき、少年がウソつきである確率 (少年の事後確率) は、次のようになります。
 $P(\text{ウソつき} | \text{発見されず}) = 0.28$
 $P(\text{正直者} | \text{発見されず}) = 0.72$

この事後確率の求め方は、次のようになります。

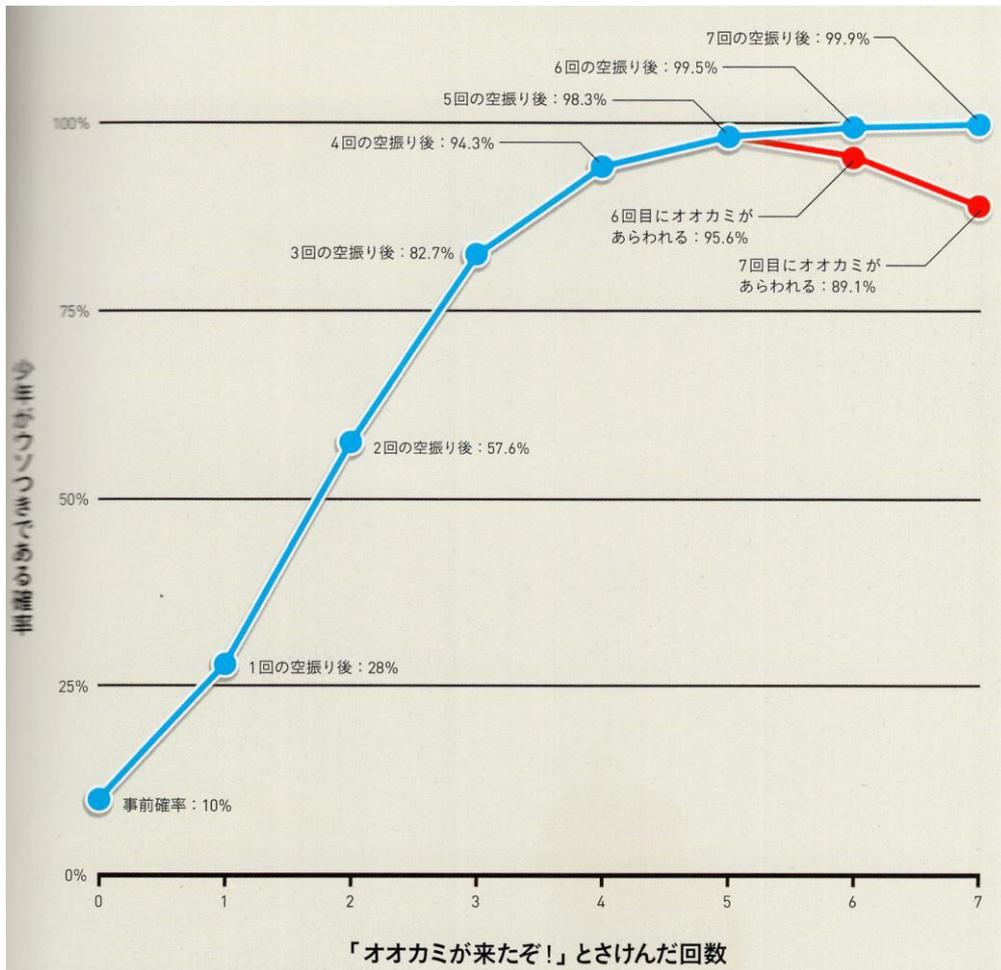
$$P(\text{ウソつき} | \text{発見されず}) = \frac{P(\text{ウソつき}) \times P(\text{発見されず} | \text{ウソつき})}{P(\text{発見されず})}$$

$$= \frac{P(\text{ウソつき}) \times P(\text{発見されず} | \text{ウソつき})}{P(\text{ウソつき}) \times P(\text{発見されず} | \text{ウソつき}) + P(\text{正直者}) \times P(\text{発見されず} | \text{正直者})}$$

$$= \frac{0.1 \times 0.7}{0.1 \times 0.7 + 0.9 \times 0.2} = 0.28 \text{ (28\%)}$$

$$P(\text{正直者} | \text{発見されず}) = 1 - P(\text{ウソつき} | \text{発見されず}) = 1 - 0.28 = 0.72 \text{ (72\%)}$$

事前確率 0.1 → 事後確率 0.28



オカミがあらわれないという「空振り」が5回つづいたあと（青い線）、6回目と7回目にオオカミがあらわれたときの変化を、赤い線で示しました。二度もつづけてオオカミがほんとうに来たというのに、少年がウソつきである確率は高いままです。一度失われた信頼は、簡単には取りもどせないことがわかります。

アメリカの政治学者アルバート・ウォルステッター（1913～1997）は、度重なる警告に対して鈍感になる傾向を「オオカミ少年症候群」とよび、旧日本軍による真珠湾攻撃をアメリカ軍が予測できなかった原因として論じています。